

# 低渗透油藏非达西渗流瞬时压力计算方法

刘文超<sup>1</sup>,姚 军<sup>1</sup>,孙致学<sup>1</sup>,王月英<sup>1</sup>,李晓燕<sup>1</sup>,李小辉<sup>2</sup>

(1.中国石油大学(华东)石油工程学院,山东 青岛 266555;

2.中国石油长庆油田分公司 储气库管理处,陕西 榆林 710085)

**摘要:**含有动边界条件的低渗透油藏非达西不稳定渗流模型是强非线性的,难以求出精确解析解,因此,将非达西渗流存在启动压力梯度的特征体现在模型的连续性方程中,建立了能反映动边界移动特征的低渗透油藏非达西不稳定渗流数学模型,但该模型并不含动边界条件,以便进行数值计算;采用 Douglas-Jones 预估校正法求得模型瞬时压力的数值解,并通过不动点迭代法验证了所求数值解的精确性。结果表明:低渗透油藏非达西不稳定渗流模型的井底瞬时压力曲线不同于经典达西渗流模型,其曲线存在拐点,在拐点之前,动边界还未到达定压外边界,此时主要依靠液体及岩石的弹性膨胀挤出原油;在拐点之后,动边界已传播到定压外边界,定压外边界的能量也已补充进来。

**关键词:**低渗透油藏 预估校正法 非达西渗流 启动压力梯度 数值解

**中图分类号:**TE312

**文献标识码:**A

**文章编号:**1009-9603(2013)01-0074-03

因为低渗透介质中的渗流存在启动压力梯度<sup>[1-3]</sup>,因此,地层中存在动边界<sup>[4-6]</sup>。目前,低渗透油藏不稳定非达西渗流模型大多含有动边界条件,从动边界问题的角度进行求解,模型数值计算较为复杂,而且有些只能求得地层压力的近似解析解<sup>[6]</sup>;含有动边界条件的低渗透油藏非达西渗流数学模型均是非线性的,动边界条件不包含动边界移动速度的显式形式,该动边界问题属于隐式类型,难以求出精确解析解。鉴于动边界问题求解的复杂性,笔者建立了能反映动边界移动规律的低渗透油藏不稳定非达西渗流数学模型,模型中不含动边界条件,采用 Douglas-Jones 预估校正有限差分方法<sup>[7-9]</sup>即可求得该模型瞬时压力的精确数值解。

## 1 数学模型的建立

在圆柱形低渗透油藏中心有1口完善井进行定产量生产,其非达西不稳定渗流模型的基本假设条件为:①油藏均质、各向同性、等温,且顶、底封闭,外边界压力恒定;②渗流属于单相水平径向流动,并忽略重力影响;③地层流体和地层岩石是微可压缩的。

低渗透油藏的非达西运动方程<sup>[10-15]</sup>为

$$v\left(\frac{dp}{dr}\right) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \frac{dp}{dr} \leq \lambda \\ -\frac{K}{\mu}\left(\frac{dp}{dr} - \lambda\right) & \frac{dp}{dr} > \lambda \end{cases} \quad (1)$$

式中: $v$ 为渗流速度,m/d; $p$ 为地层压力,MPa; $r$ 为径向距离,m; $\lambda$ 为启动压力梯度,MPa/m; $K$ 为储层渗透率, $10^{-3} \mu\text{m}^2$ ; $\mu$ 为地层流体粘度,mPa·s。

低渗透油藏不稳定径向渗流的连续性方程<sup>[16]</sup>为

$$-\frac{1}{r}\left[v\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) + r\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}\right] = \phi_i C_1 \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2)$$

式中: $\phi_i$ 为初始孔隙度; $C_1$ 为综合压缩系数,MPa<sup>-1</sup>; $t$ 为时间,h。

初始条件为

$$p(r,t)|_{t=0} = p_i \quad (3)$$

式中: $p_i$ 为原始地层压力,MPa。

内边界定产量条件为

$$r\left(\frac{dp}{dr} - \lambda\right)\Big|_{r=r_w} = \frac{q\mu B}{2\pi Kh} \quad (4)$$

式中: $r_w$ 为井筒半径,m; $q$ 为地面油井产量,m<sup>3</sup>/d; $B$ 为地层原油体积系数,m<sup>3</sup>/m<sup>3</sup>; $h$ 为油藏厚度,m。

收稿日期:2012-12-07。

作者简介:刘文超,男,在读博士研究生,从事渗流力学及其应用研究。联系电话:15192596919, E-mail: wcliu\_2008@126.com。

基金项目:国家自然科学基金青年科学基金项目“基于离散裂缝模型的低渗透油藏压裂水平井流动模拟研究”(11102237)。

外边界定压条件为

$$p(r, t) \Big|_{r=r_e} = p_i \quad (5)$$

式中:  $r_e$  为油藏外边界半径, m。

将式(2)一式(5)进行无因次化, 可得

$$\frac{\partial p_D}{\partial t_D} = \frac{1}{r_D} \left[ v_D \left( \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right) - r_D v_D' \left( \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right) \times \frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} \right] \quad (6)$$

$$p_D \Big|_{t_D=0} = 0 \quad (7)$$

$$r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = -(1 + \lambda_D) \quad (8)$$

$$p_D \Big|_{r_D=r_{eD}} = 0 \quad (9)$$

其中

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad (10)$$

$$r_{eD} = \frac{r_e}{r_w} \quad (11)$$

$$t_D = \frac{3.6 \times 10^{-3} K t}{\phi_i C_i \mu r_w^2} \quad (12)$$

$$\lambda_D = \frac{K h r_w \lambda}{1.842 \mu q B} \quad (13)$$

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{K h [p_i - p(r, t)]}{1.842 q \mu B} \quad (14)$$

$$v_D \left( \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right) = \begin{cases} 0 & 0 \leq -\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \leq \lambda_D \\ \frac{\partial p_D}{\partial r_D} + \lambda_D & -\frac{\partial p_D}{\partial r_D} > \lambda_D \end{cases} \quad (15)$$

$$v_D' \left( \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right) = \begin{cases} 0 & 0 \leq -\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \leq \lambda_D \\ -1 & -\frac{\partial p_D}{\partial r_D} > \lambda_D \end{cases} \quad (16)$$

式中: D 为无因次量。

式(6)一式(16)构成了低渗透油藏非达西渗流瞬时压力的无因次数学模型。此外, 由式(15)和式(16)可知, 尽管该模型不含动边界条件, 但低渗透油藏非达西渗流存在启动压力梯度<sup>[1-3]</sup>的特征却体现在模型的连续性方程中; 模型瞬时压力的数值结果将体现动边界到达定压外边界前和动边界到达定压外边界后2个不同阶段的渗流特征。

## 2 数学模型的求解

令  $x = \ln r_D$ , 则式(6)、式(8)和式(9)分别变为

$$e^x \frac{\partial p_D}{\partial t_D} = v_D \left( \frac{1}{e^x} \times \frac{\partial p_D}{\partial x} \right) - e^x v_D' \left( \frac{1}{e^x} \times \frac{\partial p_D}{\partial x} \right) \times \left( -\frac{1}{e^{2x}} \times \frac{\partial p_D}{\partial x} + \frac{1}{e^{2x}} \times \frac{\partial^2 p_D}{\partial x^2} \right) \quad (17)$$

$$\frac{\partial p_D}{\partial x} \Big|_{x=0} = -(1 + \lambda_D) \quad (18)$$

$$p_D \Big|_{x=\ln r_{eD}} = 0 \quad (19)$$

Douglas-Jones 预估校正法<sup>[7-9]</sup>是一种基于隐式线性化的有限差分方法, 可有效应用于非线性抛物型偏微分方程数值求解; 其通过预估和校正<sup>[7-9]</sup>2个线性化差分格式可求解第  $j+1$  时间层的压力。首先, 通过第  $j$  时间层的已知压力估算第  $j+1/2$  时间层的压力值, 此为预估格式; 再利用第  $j+1/2$  时间层的压力估算值求解第  $j+1$  时间层的压力值, 此为校正格式; 且由于预估格式和校正格式均为求解三对角的线性方程组, 可利用追赶法<sup>[17]</sup>求解。

假定非线性偏微分方程为

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = g_1 \left( x, t, P, \frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{\partial P}{\partial t} + g_2 \left( x, t, P, \frac{\partial P}{\partial x} \right) \quad (20)$$

式中:  $P$  为未知函数;  $g_1$  和  $g_2$  为已知函数。

根据文献[7-9]的预估和校正格式, 将其应用于求解所建数学模型, 式(17)的预估格式为

$$2e^{i\Delta x} \frac{P_{Di}^{j+\frac{1}{2}} - P_{Di}^j}{\Delta t} = v_D \left( \frac{P_{Di+1}^j - P_{Di-1}^j}{2\Delta x e^{i\Delta x}} \right) - e^{i\Delta x} v_D' \left( \frac{P_{Di+1}^j - P_{Di-1}^j}{2\Delta x e^{i\Delta x}} \right) \times \left[ \frac{P_{Di+1}^{j+\frac{1}{2}} - 2P_{Di}^{j+\frac{1}{2}} + P_{Di-1}^{j+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2 e^{2i\Delta x}} - \frac{P_{Di+1}^j - P_{Di-1}^j}{2\Delta x e^{2i\Delta x}} \right] \quad (21)$$

式中:  $i$  为空间间隔数;  $j$  为时间间隔数。

内边界条件的预估格式为

$$P_{D-1}^{j+\frac{1}{2}} = P_{D1}^{j+\frac{1}{2}} + 2\Delta x (1 + \lambda_D) \quad (22)$$

式(17)的校正格式为

$$e^{i\Delta x} \frac{P_{Di}^{j+1} - P_{Di}^j}{\Delta t} = v_D \left( \frac{P_{Di+1}^{j+\frac{1}{2}} - P_{Di-1}^{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x e^{i\Delta x}} \right) - e^{i\Delta x} v_D' \left( \frac{P_{Di+1}^{j+\frac{1}{2}} - P_{Di-1}^{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x e^{i\Delta x}} \right) \times \left[ \frac{(P_{Di+1}^{j+1} - 2P_{Di}^{j+1} + P_{Di-1}^{j+1}) + (P_{Di+1}^j - 2P_{Di}^j + P_{Di-1}^j)}{2(\Delta x)^2 e^{2i\Delta x}} - \frac{P_{Di+1}^{j+\frac{1}{2}} - P_{Di-1}^{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x e^{2i\Delta x}} \right] \quad (23)$$

内边界条件的校正格式为

$$P_{D-1}^{j+1} = P_{D1}^{j+1} + 2\Delta x (1 + \lambda_D) \quad (24)$$

初始条件为

$$p_{Di}^0 = 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, M \quad (25)$$

式中:  $M$  为空间的总单元格数。

定压外边界条件为

$$p_{DM}^j = 0 \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, N \quad (26)$$

从式(21)和式(23)可以看出, Douglas-Jones 预估校正法使式(17)中关于无因次压力梯度的分段函数  $v_D$  和  $v_D'$  在差分方程中为显式, 无需参与迭代, 简化了计算, 提高了计算效率。

作为验证 Douglas-Jones 预估校正法瞬时压力数值解的全隐不动点迭代<sup>[17]</sup>格式为

$$e^{i\Delta x} \frac{p_{Di}^{j+1(m+1)} - p_{Di}^j}{\Delta t} = v_D \left( \frac{p_{Di+1}^{j+1(m)} - p_{Di-1}^{j+1(m)}}{2e^{i\Delta x} \Delta x} \right) - e^{i\Delta x} v_D' \left( \frac{p_{Di+1}^{j+1(m)} - p_{Di-1}^{j+1(m)}}{2e^{i\Delta x} \Delta x} \right) \times \left[ \frac{p_{Di+1}^{j+1(m+1)} - 2p_{Di}^{j+1(m+1)} + p_{Di-1}^{j+1(m+1)}}{e^{2i\Delta x} (\Delta x)^2} - \frac{p_{Di+1}^{j+1(m+1)} - p_{Di-1}^{j+1(m+1)}}{2e^{2i\Delta x} \Delta x} \right] \quad (27)$$

式中:  $m$  为迭代次数。

### 3 结果分析

某低渗透油藏的基础数据包括: 启动压力梯度为  $8.0 \times 10^{-5}$  MPa/m, 地层流体粘度为  $3 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ , 油井产量为  $2.8 \text{ m}^3/\text{d}$ , 油层厚度为  $8 \text{ m}$ , 井筒半径为  $0.1 \text{ m}$ , 油藏外边界半径为  $20 \text{ m}$ , 油藏渗透率为  $4.5 \times 10^{-3} \mu\text{m}^2$ , 初始孔隙度为  $0.11$ , 总压缩系数为  $3.5 \times 10^{-4} \text{ MPa}^{-1}$ , 体积系数为  $1.0 \text{ m}^3/\text{m}^3$ 。根据无因次变量的定义, 求得无因次外边界半径为  $200$ , 无因次启动压力梯度为  $1.9 \times 10^{-5}$ 。利用 Douglas-Jones 预估校正法与不动点迭代法分别对数学模型进行数值求解, 并将无因次瞬时井底压力 ( $p_{wD}$ ) 的数值解绘制成双对数曲线图版(图1)。

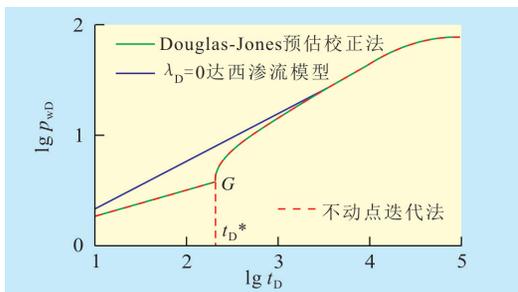


图1 瞬时井底压力的双对数曲线

从图1可以看出, Douglas-Jones 预估校正法与不动点迭代法<sup>[17]</sup>所求结果吻合得很好, 由此验证了 Douglas-Jones 预估校正法所求数值解的精确性。另外, 从图1还可看出, 低渗透油藏非达西不稳定渗流模型的井底瞬时压力曲线与  $\lambda_D$  为0时的经典达西渗流模型曲线<sup>[16]</sup>不同, 其曲线存在拐点; 假定拐点对应的无因次时间为  $t_D^*$ , 当  $t_D$  小于  $t_D^*$  时, 动边界还未到达定压外边界, 其不断地向外边界传播, 此时主要依靠液体及岩石的弹性膨胀<sup>[16]</sup>挤出原油; 当  $t_D$  大于等于  $t_D^*$  时, 动边界已传播到定压外边界, 此时整个油藏的地层压力梯度均大于启动压力梯度, 油藏中已不存在动边界, 定压外边界的能量也已补充进来。

### 4 结论

建立了能反映动边界移动特征的低渗透油藏非达西不稳定渗流数学模型, 模型中不包含动边界条件, 便于进行数值差分; 采用有效的 Douglas-Jones 预估校正法, 求得了该模型瞬时压力的数值解, 并进一步验证了数值解的精确性。

计算结果表明: 低渗透油藏非达西不稳定渗流井底瞬时压力的双对数曲线存在拐点, 拐点前的曲线段反映动边界到达定压外边界前的井底瞬时压力变化特征; 拐点后的曲线段反映动边界到达定压外边界后的瞬时井底压力变化特征。

#### 参考文献:

- [1] 李爱芬, 张少辉, 刘敏, 等. 一种测定低渗油藏启动压力的新方法[J]. 中国石油大学学报: 自然科学版, 2008, 32(1): 68-71.
- [2] Lei Qun, Xiong Wei, Yuan Jiangru, et al. Behavior of flow through low-permeability reservoirs[R]. SPE 113144, 2008.
- [3] 黄延章. 低渗透油层渗流机理[M]. 北京: 石油工业出版社, 1998.
- [4] 程时清, 张盛宗, 黄延章, 等. 低速非达西渗流动边界问题的积分分解[J]. 力学与实践, 2002, 24(3): 15-17.
- [5] 郭永存, 曾清红, 王仲勋. 动边界低渗透油藏的无网格方法数值模拟[J]. 工程力学, 2006, 23(11): 188-192.
- [6] Wu Y S, Karsten Pruess, Witherspoon P A. Flow and displacement of Bingham non-Newtonian fluids in porous media[J]. SPE Reservoir Engineering, 1992, 7(3): 369-376.
- [7] Chi U Ikoku, Henry J Ramey Jr. Numerical solution of the nonlinear non-Newtonian partial differential equation [R]. SPE 7661, 1978.
- [8] Babajimopoulos C. Revisiting the Douglas-Jones method for modeling unsaturated flow in a cultivated soil[J]. Environmental Mod-