

Arps双曲线递减模型的多解性和不确定性

陈元千¹,徐良^{1,2}

(1.中国石油勘探开发研究院,北京 100083; 2.中国地质大学(北京)能源学院,北京 100083)

摘要:ARPS于1945年基于对油气井产量递减曲线数据的统计、分析,提出了具有重要理论意义的递减率概念及其微分表达式,并首创建立了指数递减模型、双曲线递减模型和调和递减模型,其中双曲线递减模型是Arps递减模型的核心。指数递减模型因具有简单易行的特点,在国际上得到了广泛应用。通过应用研究发现,属于经验性的双曲线递减模型,因其存在明显的不确定性,在实际中应用得很少。由双曲线递减模型简化得到的调和递减模型也几乎没有应用。同时,通过对Arps双曲线递减模型,与陈元千泛指数递减模型的对比性应用结果表明, $n=0.5$ 的双曲线递减模型是Arps双曲线递减模型的最佳选择,可有效地用于页岩气井产量和井控可采储量的评价。

关键词:Arps双曲线递减模型;多解性;不确定性;应用;可比性;选择

中图分类号:TE32[·]8

文献标识码:A

Multi-solution and uncertainty of Arps' hyperbolic exponential decline model

CHEN Yuanqian¹, XU Liang^{1,2}

(1. Research Institute of Petroleum Exploration & Development, PetroChina, Beijing City, 100083, China;

2. School of Energy Resources, China University of Geosciences (Beijing), Beijing City, 100083, China)

Abstract: In 1945, ARPS proposed the theoretically significant decline rate and its differential form based on the statistics and analysis of the production decline curve. The exponential decline model, hyperbolic decline model, and harmonic decline model were first built, of which the hyperbolic decline model was the core of the Arps decline model. The exponential decline model has been widely used due to its simplicity and ease of operation. The application research shows that the empirical hyperbolic decline model is rarely used in practice because of its obvious uncertainty. The harmonic decline model simplified from the hyperbolic decline model has hardly been applied. At the same time, the Arps hyperbolic decline model with $n=0.5$ is the best choice through the comparison with the generic exponential decline model by Chen Yuanqian, which can be effectively used to predict the production rate and recoverable reserves of shale gas wells.

Key words: Arps hyperbolic decline model; multi-solution; uncertainty; application; comparability; choice

对于包括页岩气的油气井和油气藏,当产量进入递减阶段后,产量递减法是评价油气井产量和可采储量的主要方法。ARPS于1945年基于对油井产量递减曲线数据的统计、分析,首创地提出了递减率概念及其微分表达式^[1-2]。在此基础上,对于递减率为常数和非常数的两种情况,分别建立了指数递减模型和双曲线递减模型与调和递减模型的雏形。1956年ARPS对三种递减模型又进行了整理归纳和

研究^[2]。然而,应当指出,递减率为常数的指数递减模型,由于具有简单易行的特点,在国际上得到油气开采公司和评估公司的青睐。而双曲线递减模型和由它简化得到的调和递减模型,在实际中应用得很少。为此,笔者对Arps双曲线递减模型进行了回顾性推导,发现应用得很少与该模型存在的多解性和不确定性有关,与陈元千泛指数递减模型(GEDM)^[3]的实际应用进行对比,得到了 $n=0.5$ 的双

收稿日期:2021-08-16。

作者简介:陈元千(1933—),男,河南兰考人,教授级高级工程师,1952年考入清华大学石油工程系,1956年毕业于北京石油学院钻采系,长期从事油气藏工程、油气田开发和油气储量评价工作。E-mail:525980269@qq.com。

曲线递减模型是最佳模型。

1 Arps双曲线递减模型建立的回顾性推导

ARPS基于对油井产量递减曲线的统计、分析,首次提出的递减率微分表达式^[1-2]为:

$$D = -\frac{dq/dt}{q} = -\frac{dq}{qdt} \quad (1)$$

应当指出,Arps这一递减率概念及微分表达式,已被陈元千等^[4-5]成功地应用于等温吸附方程和渗吸驱油方程的推导。

为了建立双曲线递减模型,ARPS在缺乏理论研究的情况下,直接提出了递减率与产量的经验公式^[1-2],其表达式为:

$$D = kq^n \quad (2)$$

ARPS将 n 称为递减指数,其理论变化范围为(0,1)。

将(2)式代入(1)式,分离变量,代入上下限得到的表达式为:

$$-\int_{q_i}^q \frac{dq}{q^{n+1}} = k \int_0^t dt \quad (3)$$

将(3)式积分并整理后,可得产量与时间的关系式为:

$$q = \frac{q_i}{(1 + nkq_i^n t)^{\frac{1}{n}}} \quad (4)$$

由(2)式可得初始理论月递减率的表达式为:

$$D_i = kq_i^n \quad (5)$$

将(5)式代入(4)式得Arps双曲线递减模型的产量公式为:

$$q = \frac{q_i}{(1 + nD_i t)^{\frac{1}{n}}} \quad (6)$$

由推导可知,Arps双曲线递减模型的建立是依赖于经验性的(2)式。因此,它应该是一个经验公式。

已知累积产量表示为:

$$G_p = \int_0^t q dt \quad (7)$$

将(6)式代入(7)式,经分离变量,代入上下限进行积分后,可得Arps双曲线递减模型的累积产量为:

$$G_p = \frac{q_i}{(1-n)D_i} \left[1 - \left(\frac{1}{1+nD_i t} \right)^{\frac{1-n}{n}} \right] \quad (8)$$

再将(6)式代入(8)式,得到Arps双曲线递减模

型的累积产量与产量的关系式为:

$$G_p = \frac{q_i}{(1-n)D_i} \left[1 - \left(\frac{q}{q_i} \right)^{1-n} \right] \quad (9)$$

当 $q \rightarrow 0$ 时,由(9)式得Arps双曲线递减模型的井控可采储量为:

$$G_R = \frac{q_i}{(1-n)D_i} \quad (10)$$

由(2)式除以(5)式得:

$$\frac{D}{D_i} = \left(\frac{q}{q_i} \right)^n \quad (11)$$

将(11)式代入(6)式得Arps双曲线递减模型的递减率为:

$$D = \frac{D_i}{(1+nD_i t)} \quad (12)$$

应当指出,由(2)式看出,当 $n=0$ 时, $q^n=1$, $D=k$,经推导可得Arps指数递减模型的产量公式;当 $n=1$ 时,由Arps双曲线递减模型,可得Arps调和递减模型的产量和递减率的公式,但得不到累积产量和井控可采储量的公式。由此可见,调和递减模型不能用于可采储量的评价。BAIHLY等利用Arps双曲线递减模型评价美国Barnett, Fayetteville, Woodfort, Haynesville和Marcellus等5个页岩气田单井30 a的累积产量时,所得到的递减指数 n 均大于1^[6-7]。而Arps双曲线递减模型的递减指数范围应为(0,1),因此,BAIHLY等评价的结果显然是不正确的。

将(1)式代入(9)式,并变换可以得到 q^{1-n} 与 G_p 的关系式为:

$$q^{1-n} = A - BG_p \quad (13)$$

其中:

$$A = q_i^{1-n} \quad (14)$$

$$B = \frac{(1-n)D_i}{q_i^{1-n}} \quad (15)$$

通过(14)式和(15)式,确定 q_i 和 D_i 的表达式分别为:

$$q_i = A^{\frac{1}{1-n}} \quad (16)$$

$$D_i = \frac{AB}{1-n} \quad (17)$$

2 Arps双曲线递减模型不确定性的揭示

美国宾州Marcellus页岩气藏M1井生产数据(表1)中,第1个月的产量实际是投产后第2个月的

表1 M1页岩气井的生产数据(据文献[8]修改)
Table1 Production data from M1 shale gas well^[8]

$t(\text{mon})$	$q(10^4 \text{ m}^3/\text{mon})$	$G_p(10^4 \text{ m}^3)$	$t(\text{mon})$	$q(10^4 \text{ m}^3/\text{mon})$	$G_p(10^4 \text{ m}^3)$	$t(\text{mon})$	$q(10^4 \text{ m}^3/\text{mon})$	$G_p(10^4 \text{ m}^3)$
1	490	490	14	229	4 439	27	147	6 746
2	410	900	15	213	4 652	28	148	6 894
3	404	1 304	16	212	4 864	29	143	7 037
4	382	1 686	17	202	5 066	30	127	7 164
5	353	2 039	18	176	5 242	31	137	7 301
6	313	2 352	19	192	5 434	32	127	7 428
7	313	2 665	20	180	5 614	33	125	7 553
8	266	2 931	21	179	5 793	34	125	7 678
9	288	3 219	22	170	5 963	35	126	7 804
10	259	3 478	23	169	6 132	36	123	7 927
11	256	3 734	24	160	6 292	37	117	8 044
12	245	3 979	25	154	6 446	38	118	8 162
13	231	4 210	26	153	6 599	39	112	8 274

产量。因排液的影响,该气井开井后第1个月的产量偏低,为 $262 \times 10^4 \text{ m}^3/\text{mon}$ 。

根据表1,利用(13)式求解,得到了Arps双曲线递减模型(AHDM)不同 n 值下的相关系数(R^2)、初始理论月产量(q_i)、初始递减率(D_i)和井控可采储量(G_R) (表2),将相关系数(R^2)和井控可采储量(G_R)绘于图1。由图1可以看出,相关系数和井控可采储量均随 n 值的增加而增加,并不存在评价井控可采储量的最佳条件。这充分表明了Arps双曲线递减模型存在多解性和不确定性。

表2 M1页岩气井利用AHDM评价的结果
Table2 Estimated results of M1 shale gas well by AHDM

$n(\text{dim})$	$R^2(\text{dim}^2)$	$q_i(10^4 \text{ m}^3/\text{mon})$	$D_i(\text{mon}^{-1})$	$G_R(10^8 \text{ m}^3)$
0	0.950 4	441	0.045	0.979 0
0.1	0.957 3	444	0.048	1.036 2
0.2	0.963 7	448	0.050	1.110 8
0.3	0.969 4	453	0.054	1.204 8
0.4	0.974 4	458	0.058	1.315 9
0.5	0.978 8	463	0.060	1.537 3
0.6	0.982 5	469	0.070	1.673 1
0.7	0.985 4	477	0.075	2.119 7
0.8	0.987 7	482	0.070	3.443 7
0.9	0.989 3	582	0.092	6.297 0

3 Arps双曲线递减模型的可比性选择

利用陈元千提出的泛指数递减模型(GEDM)^[3]

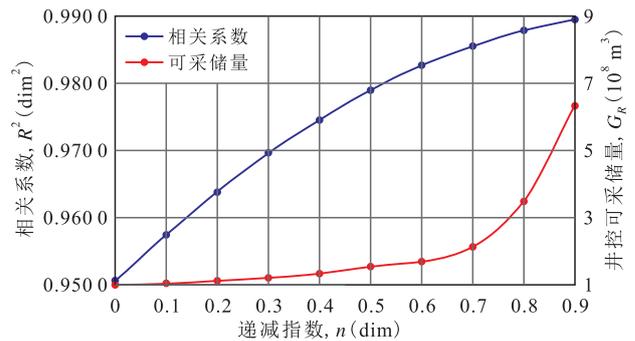


图1 M1页岩气井利用AHDM评价的 R^2 和 G_R 与 n 的关系
Fig.1 Plot of R^2 and G_R with n for M1 shale gas well by AHDM

用于Arps双曲线递减模型的可比性选择。陈元千提出的泛指数递减模型的产量为:

$$q = q_i \exp(-t^m/c) \tag{18}$$

井控可采储量为:

$$G_R = \frac{q_i c^{1/m}}{m} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \tag{19}$$

递减率与时间的关系式为:

$$D = \frac{m}{ct^{1-m}} \tag{20}$$

(18)式—(20)式中的 m 为泛指数,其理论范围为(0,1)。当 $m=1$ 时可得Arps指数递减模型的关系式。为了确定模型中的 q_i 和 c 值,将(18)式取自然对数得:

$$\ln q = \alpha - \beta t^m \tag{21}$$

其中:

$$\alpha = \ln q_i \tag{22}$$

$$\beta = \frac{1}{c} \tag{23}$$

将由(21)式求得的不同 m 值下的 R^2 , q_i , c , $\Gamma(1/m)$ 和 G_R 值列于表3, 并将 R^2 和 G_R 绘于图2。由图2看出, R^2 与 m 的关系曲线存在峰值, 对应的峰位 $m=0.5$ 。该 m 值对应的井控可采储量即为欲求的最佳井控可采储量 $G_R=1.626 \times 10^8 \text{ m}^3$ 。根据文献[8]的研究, 双曲线递减模型的 n 值, 与泛指数递减模型的 m 值, 存在 $n=1-m$ 的关系。因此, 由 $m=0.5$ 泛指数递减模型, 可得双曲线递减模型 $n=0.5$ 的最佳选择。由表1可知, $n=0.5$ 的井控可采储量 $G_R=1.5375 \times 10^8 \text{ m}^3$, 这与 $m=0.5$ 泛指数递减模型评价的井控可采储量基本相同。

表3 M1页岩气井利用GEDM的评价结果
Table3 Estimated results of M1 shale gas well by GEDM

$m(\text{dim})$	$R^2(\text{dim}^2)$	$q_i(10^4 \text{ m}^3/\text{mon})$	$c(\text{mon})$	$\Gamma(1/m)$	$G_R(10^8 \text{ m}^3)$
0.1	0.9619	24587	0.27	362880	20.2776
0.2	0.9771	2539	0.68	24	4.5014
0.3	0.9871	1186	1.29	2.78	2.6001
0.4	0.9922	807	2.20	1.33	1.9474
0.5	0.9931	639	3.56	1	1.6260
0.6	0.9905	545	5.57	0.90	1.4389
0.7	0.9849	486	8.53	0.88	1.3174
0.8	0.9770	445	12.90	0.91	1.2325
0.9	0.9671	415	19.31	0.95	1.1699
1.0	0.9558	391	28.65	1	1.1213

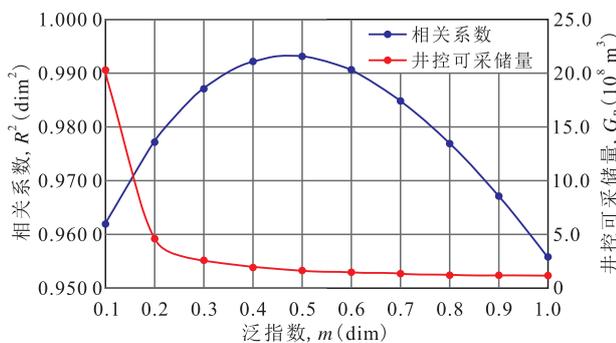


图2 M1页岩气井利用GEDM评价的 R^2 和 G_R 与 n 的关系
Fig.2 Plot of estimated R^2 and G_R with n of M1 shale gas well by GEDM

当双曲线递减模型和泛指数递减模型的指数均为0.5时, M1页岩气井实际产量数据点与 $m=0.5$ 泛指数递减模型的预测理论曲线拟合得较好(图3); 双曲线递减模型预测的递减率曲线变化较小(图4), 而泛指数递减模型预测的递减率曲线开始变化较大, 5个月后递减率变化趋势逐渐变缓, 这符合页岩气井产量递减曲线变化的特征。

4 结论

对于非常规的页岩气藏, 需要通过钻水平井,

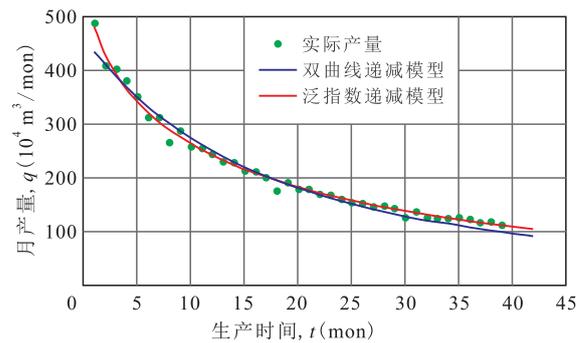


图3 指数为0.5时两类递减模型预测产量与M1页岩气井实际产量对比

Fig.3 Plot of predicting q with t of two decline models ($m=0.5$ and $n=0.5$)

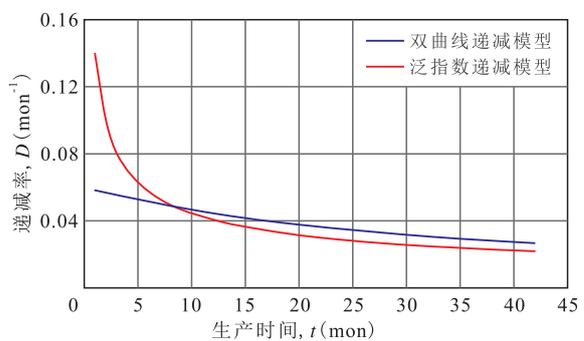


图4 双曲线和泛指数递减模型指数为0.5时预测的 D 值
Fig.4 Plot of predicting D with t of two decline models ($m=0.5$ and $n=0.5$)

实施多段压裂, 以降解压吸方式投入开采。通过多段压裂形成的以页岩水平气井为中心的连通体, 是一个定容、封闭、独立的开采单元。因此, 产量递减法是评价页岩气井产量和井控可采储量的重要方法。由ARPS建立的指数递减模型、双曲线递减模型和调和递减模型, 可能是世人共同关注的评价方法。然而, Arps指数递减模型, 由于递减率随时间为常数, 并不适用于页岩气井产量开始递减得快, 而后逐渐变慢的特点。Arps双曲线递减模型, 由于存在明显的不确定性, 难以进行可靠的评价。由Arps双曲线递减模型, 当 $n=1$ 时简化得到的调和递减模型, 在实际中很少应用, 只有其名, 而无其实。通过对Arps双曲线递减模型建立的回顾, 揭示了该模型存在的经验性、多解性和不确定性。同时, 通过与泛指数递减模型的实际对比应用, 得到了 $n=0.5$ 双曲线递减模型具有较好的评价结果。 $n=0.5$ 双曲线递减模型和 $m=0.5$ 泛指数递减模型评价的井控可采储量基本一致。 $m=0.5$ 的泛指数递减模型的预测结果好于 $n=0.5$ 的双曲线递减模型。 $n=0.5$ 双曲线递减模型预测的递减率曲线自始至终变化较小, 并不符合页岩气井产量开始递减较快而后递减变慢的特点。而 $m=0.5$ 的泛指数递减模型, 预测

的递减率曲线符合页岩气井开始递减得快,而后变慢的特点。BAIHLY等利用Arps双曲线递减模型,预测美国Barnett等5个页岩气田单井30 a的累积产量,由于确定的递减指数 n 都大于1,完全不符合该模型递减指数为(0,1)的理论范围,因此,评价结果是不正确的。

符号解释

A 和 B ——Arps双曲线递减模型直线的截距和斜率;
 c ——泛指数递减模型的时间常数,mon;
 D ——月递减率,mon⁻¹;
 D_i ——初始理论月递减率,即 $t=0$ 时的理论月递减率,mon⁻¹;
 G_p ——累积产量,10⁴ m³;
 G_R ——井控可采储量,10⁴ m³或10⁸ m³;
 k ——Arps经验公式的比例常数;
 m ——泛指数递减模型的幂指数,dim;
 n ——Arps双曲线递减模型的递减指数,dim;
 q ——页岩气井月产量,10⁴ m³/mon;
 q_i ——初始理论月产量,即 $t=0$ 时的理论月产量,10⁴ m³/mon;
 R^2 ——相关系数,dim²;
 t ——生产时间,mon;
 α 和 β ——泛指数递减模型直线的截距和斜率;
 $\Gamma(1/m)$ ——完全伽马函数。

参考文献

- [1] ARPS J J. Analytics of decline curves [J]. AIME, 1945, 160: 228-247.
 [2] ARPS J J. Estimation of primary oil reserves [J]. AIME, 1956, 267:

182-186.

- [3] 陈元千,徐佳倩,傅礼兵. 预测页岩气井产量和可采储量泛指数递减模型的建立及应用[J]. 油气地质与采收率, 2021, 28(1): 132-136.
 CHEN Yuanqian, XU Jiaqian, FU Libing. Establishment and application of pan exponential decline model for forecasting production rate and recoverable reserves of shale gas wells [J]. Petroleum Geology and Recovery Efficiency, 2021, 28(1): 132-136.
 [4] 陈元千,傅礼兵,郝明强. 气体吸附方程和解吸方程的推导及应用[J]. 中国海洋油气, 2018, 30(2): 85-89.
 CHEN Yuanqian, FU Libing, HAO Mingqiang. Derivation and application of gas adsorption equation and desorption equation [J]. China Offshore Oil and Gas, 2018, 30(2): 85-89.
 [5] 陈元千. 对Aronofsky渗吸驱油机理经验模型的推导[J]. 断块油气田, 2015, 22(6): 773-775.
 CHEN Yuanqian. Derivation of empirical model of Aronofsky's imbibition displacement mechanism [J]. Fault-Block Oil and Gas Field, 2015, 22(6): 773-775.
 [6] BAIHLY J, ALTMAN R, MALPANI R, et al. Shale gas production decline trend comparison over time Basins [C]. SPE 135555-MS, 2010.
 [7] BAIHLY J D, MALPANI R, ALTMAN R, et al. Shale gas production decline trend comparison over time and basins [C]. SPE 178674-MS, 2015.
 [8] 陈元千,傅礼兵,徐佳倩. 两类产量递减模型在预测页岩气井和致密气井中的应用与对比[J]. 油气地质与采收率, 2021, 28(3): 84-89.
 CHEN Yuanqian, FU Libing, XU Jiaqian. Application and comparison of two production decline models in shale gas wells and tight gas wells [J]. Petroleum Geology and Recovery Efficiency, 2021, 28(3): 84-89.

编辑 常迎梅